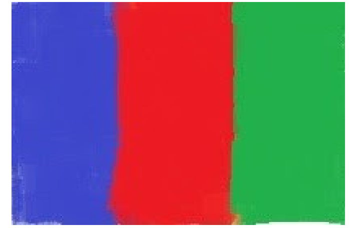
Fall October 17, 2023

Les Nevanlinna.pdf

Rachid ELAÏDI, *University of California - Berkeley*



Rachid ELAÏDI

Le 17/10/2023

sujet :

Les 60 théorèmes sur les fonctions entières méromorphes...

Il s'agit d'un essai universitaire pour démontrer la validité de l'intelligence artificielle et j'ai utilisé beaucoup de ces applications, de l'intelligence artificielle, pour diriger un travail de recherche en mathématique et je constatet qu 'il existe seulement une validité au plus égale à 89% et donc l'intelligence artificielle a encore des efforts à faire pour une perfection de plus de 99% .

Le directeur de cette recherche en mathématique est justement l'intelligence artificielle . Et il n'est pas exclu de trouver des erreurs voire des fautes car ce travail dépend comme tous travaux de cette nature;publication , post thèse...du niveau intellectuel du directeur de recherche , par conséquent, le mien est justement l'intelligence artificielle de 2023 étant donné que la plupart de ces applications ont une programmation jusqu'au 2021 qui veut dire que l'intelligence artificielle n'a pas d'autres informations plus récentes.

Le sujet que j'ai choisi est la fonction méromorphe , holomorphe, entière, ...selon Nevanlinna et donc j'ai fait tourné le sujet sur tous(ou presque)ses angles.

Et donc il y a une soixantaine de théorème tous ont été validé par l'intelligence artificielle. Et donc, par voie de conséquence ,ces théorèmes sont encore une fois à vérifier au sens classique du terme . Néanmoins ,ils sont utilisables dans plusieurs domaines et de l'ingénierie, la médecine et éventuellement en mathématique et dans d'autres domaines de la science.

Et chaque fois que je pouvais, j'introduisais dans les explications données par l'intelligence artificielle sur une validité de ce que l'intelligence artificielle avance comme explication sur le pourquoi de ce théorème jugé vrai et j'ajoute de temps en temps cette expression "j'en conviens".

Je ne donne pas trop de références des livres classiques car tout ce travail s'est fait en collaboration trop étroite avec l'intelligence artificielle ,néanmoins ,il est toujours utile de savoir sur les définitions des termes utilisés... et que je préfère une liste des applications de l'intelligence artificielle.

En effet , comme le rôle d'un directeur de recherche est de confirmer ou d'infirmer un travail du thésard ou de celui qui présente une publication universitaire de recherche , a donc un rôle de guide,par contre l'intelligence artificielle va plus loin.

Pour ma part ,l'intelligence artificielle jouait ce rôle de directeur de recherche avec une différence énorme qu'on peut discuter de la validité de ce que le chercheur avance et éventuellement ,il existe une honnêteté de l'intelligence artificielle sous forme de ces expressions "... , je m'excuse , je me suis trompé, excusez la confusion …" ce genre dévouement et de savoir s'excuser , qu'aucun directeur de recherche humain ne reconnaît ses propres erreurs,qui montre d'un autre côté,que l'intelligence artificielle a encore des efforts à faire pour une perfection maximale.

Il est donc évident qu'avec le temps , l'intelligence artificielle remplacerait pour du bon le directeur de recherche et sa clique de jury car l'intelligence artificielle développe une intelligence croissante et vivace avec le temps, alors que l'humain se contente d'un niveau stagné et la plupart de temps s'oriente vers d'autres secteurs non productif ,scientifiquement parlant , à l'instar des chercheurs (la plupart font et la recherche et l'enseignement et que tout ce monde souffre de l’inadéquation et donc l'insuffisance de temps d'être complètement engagé dans la recherche qui donne par voie de conséquence, un résultat mitigé ...

Au début ,j'avais voulu faire une thèse de plus et j'ai demandé à l'intelligence artificielle de me propser un plan de thèse ,chose faite et j'avais suivi ce plan et je me suis rendu compte qu'on peut faire mieux avec l'intelligence artificielle et je me suis donc dirigé vers un développement des théorèmes et au passage , ce travail n'est pas exhaustif et horizontalement et verticalement ; ni au niveau des validités ni au niveau des théorèmes en quantité et je me suis limité à une soixantaine de théorème tous de moi ,dont je pourrais faire au moins10 et facilement.

Certainement , l'intelligence artificielle arriverait à un niveau encore supérieure et tous les théorèmes des chercheurs en mathématiques et dans d'autres disciplines seront ciblés ,à corriger ou à faire des extensions ou encore de les perfectionner et donc de les améliorer. Ce qui est donc valable en mathématique est valable dans tous les autres domaines de la science et de la politique,...

Il est vrai, que les chercheurs dans le futur proche à condition siné-qua-non, pas de guerre nucléaire au niveau mondial...et donc un avenir auront plus de facilité à faire leur recherche sainement et très avancé.

Et donc le "robotisme"est une valeur qui est très loin d'être négligeable . Ce qui est important à souligner que tous les métiers du monde y compris les plus compliqués seront facilement accessible à quelque soit l'individu avec une condition siné_qua- qu'il existe réellement une volonté d'apprendre le savoir...car il n'y aurait plus de complication grâce à l'intelligence artificielle et donc qui serait une question de formation sur le terrain et donc,on peut avoir plusieurs métiers à la fois ; aucune formation ne mérite ces facultés et les années derrières et sur le plan théorique, grâce à l'intelligence artificielle nous compteront les avancées en grands pas et non en accroissement des petits ...

Sans plus tarder en voici les 60 théorèmes que j'avais écris sur papier et ensuite transférés par système de photos et donc ce sont des OCR ,ces images sont lisibles sur openoffice et donc en PDF …

Chaque théorème prend ,en gros,une page, numérotées et ces théorèmes ne sont pas classés selon leur importance quoique sont tous important, mais donnés en vrac et qui sont tous importants et aucun théorème ne découle d'un autre théorème ou …

En effet il s'agit d'un travail énorme et c'est pour cette raison que ce travail universitaire n'est exhaustif , il y a d'autres démonstrations et d'autres théorèmes qui sont plus important que je n'ai pas mentionné par manque de temps .

Les applications de ces théorèmes sont dans beaucoup de domaines scientifique en médecine ,en chimie, …,en politique, en psy, en socio...il faut avoir une compréhension plus large pour comprendre les applications de ces théorèmes

avec r = cte

je je n'utilise pas dans cet exposé

Théorème (2)

si dens(A) < densité(B) et/ou $e(A) < e(B)$

alors $f'' + A(z)f' + B(z)f = 0$ possède une infinité de solutions

avec les conditions aux limites $z = C$ (constante réelle à déterminer). e^z

et à l'origine

$z = 0$

Théorème (3)

si $Res(A) < Res(B)$ alors $f'' + A(z)f'(z) + B(z).f = 0$

possède une infinité de solutions

Théorème (4)

si f possède un développement en série de Laurent simple

alors ∃ une infinité de solutions de

$f'' + A(z).f' + B(z).f = 0$

Théorème (5)

a) si $A(z)$, $B(z)$ sont des fonctions entières non-constantes

b) et si $\rho(A) < \rho(B)$ et/ou $\text{Res}(A) < \text{Res}(B)$

alors toutes les solutions non-triviales de l'équation différentielle linéaire

$$(1) \quad f''(z) + A(z) f'(z) + B(z) f(z) = 0$$

sont d'ordre fini

pour un ordre infini il faut ajouter une condition qui stipule que (1) doit avoir un pt. (singulier à / régulier ∞)

par exemple selon I.A. lors $|z| \to \infty$

$A(z) \to 0$

$B(z) \to 0$

$A'(z) \to 0$

$B'(z) \to 0$

$A''(z) \to 0$

$B''(z) \to 0$

et si l'infini est d'ordre 4 $A'''(z) \to 0$

$B'''(z) \to 0$

...

et donc $f''(z) + A(z) f'(z) + B(z) f(z) = 0$

a des solutions d'ordre infini.

c'est une des conditions il y en a d'autres.

et le théorème suivant de thème (6)

si $A(z)$ / $B(z)$ sont a) des fonctions entières

b) et si $\rho(A) < \rho(B)$ et/ou $\text{Res}(A) < \text{Res}(B)$

et si c) (1) a un pt singulier régulier quand $z \to \infty$

qui implique $A(z), A'(z), A''(z) \ldots$ / $B(z), B'(z), B''(z) \ldots \to 0$

lorsque $z \to \infty$

alors toutes les solutions non-triviales de l'équation différentielle linéaire

$$f''(z) + A(z) f'(z) + B(z) f(z) = 0$$

sont d'ordre infini.



Théorème 6

Si $\Phi(z) = h(z) \cdot e^{bz}$ où $h(z)$ est une fonction entière et transcendante et comme toute fonction entière la fonction est aussi méromorphe d'ordre $< \frac{1}{2}$ et b est une constante $\in \mathbb{R}$

alors toutes les solutions non-triviales f de :

$$(1)\ f'' + e^{(-z)} \cdot f' + \Phi(z) \cdot f = H(z)$$

satisfont $\rho(f) = \text{lambda}(\frac{1}{f})(f - z) = \infty$ à condition que $\rho(H) < 1$

pour I.A. ce théorème est faux

et j'ai ajouté les conditions aux limites a) $f \to \infty$
$z = c(e^{-z}) \to \infty$

et b) $f \to 0$ à l'origine

et de plus une hypothèse si $\rho(f) < \rho(H) < 1$

dans ce cas seulement le théorème est vrai

selon I.A. il donne une preuve de la fausseté du théorème sans ajout

Preuve selon I.A (chat.GPT) de la première affirmation qui est un théorème selon une publication universitaire à l'université Nanchang

présenté ce théorème par Hong-Yan XU et Ting-Bin CAO

cette publication intitulé : Oscillation of solutions of some Higher order linear differential equations

(théorème A)

et donc d'après I.A $\exists$ des fonctions $H(z)$ pour lesquelles il peut y avoir des solutions f ayant un rayon de convergence fini même si $H(z)$ a un rayon de convergence ∞

alors que la deuxième affirmation que j'ai ajouté $\rho(f) < \rho(H) < 1$ est vraie

car le rayon de convergence de la série de Taylor de H centrée en z, noté $\rho(H)$ sera toujours plus grand que le rayon de convergence de la série de Taylor de f centrée en z, noté $\rho(f)$

et selon une autre I.A.

la première proposition

$$e(f) = \bar{\lambda}(f-g) = \infty \text{ à}$$

condition que $e(H) < 1$

est vrai

explication si $e(H) < 1 \Rightarrow H(g)$ est d'ordre > 1

$\Rightarrow f$ est d'ordre inférieur à 1 puisque $(\bar{\lambda} > 1)$

et puisque $\underbrace{e(f)}_{\infty} < \underbrace{e(H)}_{\wedge\, 1}$ à infirmer

donc si $e(f) < e(H) < 1$ est considéré invalide

selon une autre I.A.

la première proposition qui est un théorème

$$e(f) = \bar{\lambda}(f-g) = \infty \text{ à condition } e(H) < 1$$

est l'équation de Riemann-Hilbert

Théorème 7

soit (1) $f'' + P(z) f' + Q(z) f = 0$

avec

$$P(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r \quad \text{et} \quad Q(z) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r z^r$$

si 1) $\mathcal{C}(P) < \mathcal{C}(Q)$ et si 2) les conditions aux limites sont : a) $f \to \infty$ $(-z)$ $z = c \cdot e^{?} \to 0$

b) $f \to 0$ à l'origine $z \to 0$

3) $Res(P) < Res(Q)$

alors (1) possède une infinité de solutions y compris au moins une solution non-triviale à ∞

et donc (1) possède une infinité de solutions

selon I.A. vrai (ce théorème est vrai)

explication selon I.A. et j'en conviens

$\rho(P) < \rho(Q) \Rightarrow$ la série de Puiseux a un rayon de convergence plus petit que celui de la série $Q(z)$

et si $Res(P) < Res(Q) \Rightarrow$ la partie résiduelle de $P(z)$ est plus petite que celle de $Q(z)$

à ces conditions (1) possède une infinité de solutions

on peut éventuellement utiliser la méthode de Frobenius pour résoudre cette équation (1) différentielle linéaire du second ordre avec des coefficients dépendant de z

on suppose on Frobenius suppose une solution de la forme

$$f(z) = \sum_{(n=0)}^{\infty} c_n \cdot z^{(n+r)}$$

c_n ↳ sont des coefficients à déterminer

si r se limite à $0 < r < \infty$ à $0 < r < 5$ par l'exemple et ensuite soit une constante égale à r égale à b_r jusqu'à ∞

Donc d'après I.A. étant donné les conditions aux

limites qui sont a)

$f \longrightarrow \infty$

$z = c \cdot e^{3} \longrightarrow \infty$

b) (quincaillerie) $f \longrightarrow 0$ = l'origine (z zéro)

selon I.A la méthode de Frobenius présente des entraves

et donc il faut utiliser la méthode des éléments finis ou la méthode des différences finies pour résoudre

$$f''(z) + P(z) \cdot f'(z) + Q(z) \cdot f(z) = 0$$

Théorème 8

selon ([illegible]) I.A. (X)

si f possède plus d'un pt. singulier $K \geq 2$

explicat:

$K \to \infty$

selon le théorème de Picard, si fonction et méromorphe possède plus de 2 pts singuliers alors f prend toutes les valeurs peut arriver complexe sauf à l'∞ fini

$\Rightarrow$ l'équation différentielle

$$f'' + A(z) f' + B(z) f = 0$$

$\Rightarrow$ une solution non-triviale

Théorème 9

si f possède plus d'un pt. singulier

$K \geq 2 \quad K \to \infty \Rightarrow f'' + A(z) f' + B(z) f = 0$

et si les conditions aux limites sont : a) $f \to \infty$

$z = c.e^{-z} \to \infty$

b) $f \to 0$ à l'orig.

alors $f'' + A(z).f'(z) + B(z).f = 0$ peut avoir

une solution non triviale et une infinité de solutions

Théorème

si $Q(z) = h(z).e^{z}$ où $h(z)$ est une fonct entière et transcendante et méromorphe d'ordre $< \frac{1}{2}$

et b est une cte réelle $\Rightarrow$ toutes les solutions non-triviales

f de $f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = H(z)$ satisfont

$\lambda(f) = \overline{\lambda}(f-z) = \infty$: condition que $\rho(H) < 1$

et si on ajoute les conditions aux limites :

a) $f \to \infty$

$z = c.e^{-z} \to \infty$

b) $f \to 0$ à l'origine

2/ $\rho(f) < \rho(H) < 1$

selon I.A.

ce théorème est vrai

avec les conditions aux limites, on peut déterminer les valeurs propres λ et les solutions correspondantes

par contre $e(f) < e(H) < 1$ n'est pas toujours vrai

mais si on limite à d'autres condition

$$e(f) < e(H) < 1$$

soit (1) $f'' + e^{-z} \cdot f' + Q(z) \cdot f = H(z)$.

l'équation caractéristique est qui est une supposition que $f(z) = e^{\lambda z}$

en substituant dans (1) on a :

$$\lambda^2 + \lambda + Q(z) - H(z)/e^{\lambda z} = 0$$

est l'équation caractéristique de : $f'' + e^{-z} f' + Q(z) f = H$

Ce résultat permettrait de définir on [illegible] les valeurs propres de λ

Théorème 11

Soit f une fonct entière et méromorphe et transcendante d'ordre fini et c une constante complexe non nulle et

$g(z+c)$ et $h(z+c)$ des fonctions entières et méromorphe ; $\rho(g) < \rho(h)$ et g est croissante, h est un polynôme complexe non constant

alors pour $n \geq 3$ ou $n \geq 2$

$f^n f(z+c)$ suppose toutes les valeurs différentes de zéro se répétant à l'infini et pas la fonct f

et donc si $\rho(f) < \rho(f(z+c)) < \rho(g(z+c)) < \rho(h(z+c))$

et si les conditions aux limites sont a/ $f \to \infty$

si $g = c \cdot e^{z} \to \infty$

b/ $f \to 0$ à l'origine

Alors

$$f'' \cdot f(z+c) + g(z+c) \cdot f' + h(z+c) \cdot f = 0$$

possède une infinité de solutions y compris des solutions non triviales

Théorème 12

soit $f'' + A(z) \cdot f' + B(z) \cdot f = 0$ (1)

où $\begin{cases} A(z) = v(z) \cdot e^{P(z)} \\ B(z) = b_m \cdot z^m + \dots + b_0 \end{cases}$

et si $m < n$ ⟹ le degré du polynôme $B(z)$ < degré du polynôme $P(z)$

Comme $B(z)$ ne peut pas annuler les autres termes

⟹ l'équation représentée par les indices (indicateurs) a une infinité de racines distinctes

⟹ toutes les solutions non triviales de (1) ont une infinité d'ordre lorsque $m < n$

Théorie 13 (plus développée)

selon la théorie de Nevanlinna, pour une fonction transcendante et méromorphe f d'ordre fini e, la fonction $N(r, f)$ compte les zéros de f de multiplicité exactement e dans le disque de rayon r.

La fonction $S_d(r, f)$ est une fonction non nulle de f appelée fonction d-petite de f

La fonction T(r,a) dans la théorie de Nevanlinna est une fonction qui mesure le comportement asymptotique des fonctions méromorphes % f.

maintenant : $F := f^n g(f)^{(s)} - b_0$, où $g(f)$ est une fonction de retard différentiel non nulle et vanishing (admet des zéros)

, et $n \geq 2$, $s \geq 1$ est une combinaison de dérivées de la fonction f et de la fonction g(f). Cette fonct (F) peut avoir une infinité des zéros, satisfont $\lambda(F) = \rho$

En sens, f est une fonct entière et méromorphe croissante avec les conditions aux limites a) $f \to \infty$ quand $z = e^{z} \to \infty$

b) $f \to 0$ à l'infini

Alors pour 2 fonctions (on en peut aussi 3 fonctions...)

$$F_1 := f \cdot g_1(f) - b_0$$

et

$$F_2 := f \cdot g_2(f) - b_0$$

avec $\max\{\lambda(F_1), \lambda(F_2)\} = \rho$ à l'exception $g_i(f)$; $i = 1, 2$

est J-small function de f.
petite fonction

ce théorème est vrai selon I.A.

Remarque

F peut avoir une infinité de zéros qui satisfont $d(F) = e$

→ qui représente un retard différentiel ≠ 0, r admet des zéros

Théorème 14

qui fait suite au théorème 13.

si F possède une infinité de zéros alors F a un ordre infini

démonstration selon I.A. (chat IA)

si F possède une infinité de zéros cela signifie qu'il existe une séquence infinie de valeurs distinctes X_n ;

$F(X_n) = 0$ $\forall n$ et j'en conviens

ordre d'une fonction est défini comme étant le plus grand entier K ; $F^{(K)}(x) \equiv 0$ une représentation de la Kième dérivée de F

puis F possède une infinité de zéros, cela signifie

que $F^{(K)}(X_n) = 0$ $\forall n$ $\forall K$ ⟹ toutes les dérivées de F

jusqu'à l'ordre K sont nulles ⟹ on peut conclure que

l'ordre de F est infini

Théorème 15

soit $L(\varphi) + Q(z)\cdot\varphi = c\cdot\varphi$ (1')

si $\varphi'' + A(z)\cdot\varphi' + B(z)\cdot\varphi = 0$ (1)

l'équation Hergoff – Nevanlinna, le frère de Rolf, en substituant

φ avec $\varphi(z)$ une fonction entière et méromorphe si les conditions aux limites sont a) $\varphi \to \infty$ quand $z = c\cdot e^{z} \to \infty$ b) $\varphi \to 0$ à l'origine

et si $\rho(A) < \rho(B)$ alors (1) possède une infinité de solutions y compris des solutions non triviales

ce théorème est vrai selon I.A. (IA chat assistant)

Explication selon I.A

en utilisant la transformation $\varphi(z) = e^{f(z)}$

l'équation devient $L(e^{f}) + Q(z)\cdot e^{f} = c\cdot e^{f}$ ce qui se simplifie en $L(f) + Q(z) = c$ qui découle de (1')

en supposant f est une fonction entière et méromorphe, les conditions aux limites sont justes

et le théorème de Picard montre que si chaque pt. $z = c \cdot e^{-z} \to \infty$ est une valeur omise par $f(z)$, alors $f(z)$ existe partout dans $\mathbb{C}$ et f est continue.

$\Rightarrow \exists$ une solution de l'équat (1) dite de Herglotz – Nevanlinna

de plus si $\rho(A) < \rho(B)$ cela signifie et je continue que le rayon de convergence de la série de de puissances de $A(z) >$ que le ray. de $B(z)$

$\Rightarrow$ l'équat (1) Herglotz – Nevanlinna possède une infinité de solutions y compris des solutions non triviales

Ecrire autrement théor. 15.

soit $L(\varphi) + Q(z) \cdot \varphi = c \cdot \varphi$ (équation de Herglotz – Nevanlinna) (2)

si maintenant,

$$\varphi'' + A(z) \cdot \varphi' + B(z) \cdot \varphi = 0 \quad (1)$$

en substituant φ de (2), avec $\varphi(z)$ une fonction entière méromorphe, si les conditions aux limites sont:

a) $\varepsilon \to \infty$ b) $\varepsilon \to 0$ à l'origine

quand $z = c.e^{(-\beta)} \to \infty$

et si $e(A) < e(B)$ alors l'expos[ant]

(1) possède une infinité de solutions y compris des solutions non triviales

Explicat I.A.

selon le théorème de Painlevé, si l'équat[ion] différentielle (1) a un comportement asymptotique particulier, alors (1) admet une infinité de solutions, y compris des solutions non triviales, dans ce cas les conditions aux limites spécifiées pour ε garantissent que l'équat[ion] [est] aussi compatible avec le théorème de Painlevé

en sens $e(A) < e(B) \Rightarrow$ (1) est de type particulier

et de conclure que (1) possède une infinité de solutions y compris des solutions non triviales.

Thème 17 (jamais thème 15 enfin de compte, autant fini du thème 16)

Soit f une fonction transcendante et méromorphe d'ordre fini $= \rho$, avec $N(r,f) = S_\lambda(r,f)$ est vanishing (contient des zéros) λ - petites fonctions de f, tout en sachant la théorie de Nevanlinna

$$T(r, \alpha) = O_{(\text{lettre } o)}(r^{\lambda+\varepsilon}) + S(r,f)$$

avec α une fonction méromorphe et $g(f)$ est vanishing de retard-différentielle (delay-differential) avec $n \geq \ell$ et $s \geq 1$ alors $\Rightarrow$ $F := f^n \cdot g(f)^s - b_0$ avec $b_0 \neq 0$ a une infinité de 0 qui satisfont $\lambda(F) = \rho$ avec condition nécessaire et suffisante $N(r,f) = S_\lambda(r,f)$

en sus: Soit $A(z) = v(z) \cdot e^{P(z)}$ avec $v(z) \neq 0$ est une fonction entière et méromorphe et $P(z) = a_n \cdot z^n + \dots + a_0$ est un polynôme de degré n; $\rho(v) < n$ et soit $B(z) = b_m z^m + \dots + b_0$

est un polynôme de degré m, $\Rightarrow$ toutes les solutions non-triviales de

$$f'' + A(z) \cdot f' + B(z) \cdot f = 0$$

avec $B(z) \neq 0$ a une infinité de solutions non triviales et donc d'ordre ∞ $\Leftrightarrow$ $m < n$

d'après I.A. ce théorème est vrai grâce à ... le théorème ... théorème ... si:

explicat:

si $F := f''(z) \cdot g(f(z))^s - b_0 \Rightarrow$

pour que F ait une infinité de zéros satisfaisant $\lambda(F) = \rho$ il faut et il suffit que le satisfaisant

et je conviens (1ère partie) de : $N(r, f) = S_d(r, f)$

De plus (2e partie) si $A(z) = v(z) \cdot e^{P(z)}$ avec $v(z) \neq 0$ une fonct entière et méromorphe et

et $\begin{cases} P(z) = a_n \cdot z^n + \dots + a_0 & \text{un polynôme de degré } n \\ B(z) = b_m \cdot z^m + \dots + b_0 & \text{un polynôme de degré } m \end{cases}$

$\Rightarrow$ toutes les solutions non triviales de

$$f''(z) + A(z) \cdot f'(z) + B(z) \cdot f(z) = 0 \text{ avec } B(z) \neq 0$$

auront une infinité de solutions, y compris des

solutions non triviales et d'ordre infini ssi

et seulement si $\Leftrightarrow m < n$

d'où la conclusion : pour les 2 parties $\Rightarrow$ théorème 17

Théorème 18

Soit $j \in \mathbb{N} \{1, 2, \dots, (m-1)\}$ et $K \in \mathbb{N} \{1, 2, \dots, (m-1)\}$

si $\lambda(A_j) < \rho(A_j)$ et $\lambda(B_K) < \rho(B_K)$

supposons que A_0 et B_0 des fonctions entières méromorphes et transcendantes satisfaisant

$$\begin{cases} \rho(A_i) < \rho(A_0) \\ \text{et } \rho(B_l) < \rho(B_0) \end{cases}$$

où et

$$\begin{cases} i = 1, 2, \dots, m-1 & \text{avec } i \neq j \\ l = 1, 2, \dots, m-1 & \text{avec } l \neq K \end{cases}$$

avec condition nécessaire et suffisante $\rho(A_0) \neq \rho(A_j)$ et $\rho(B_0) \neq \rho(B_K)$

$\Rightarrow$ toutes les solutions non triviales de

$$f^{(m)} + A_{(m-1)}(z) \cdot f^{(m-1)} + \dots + A_1(z) \cdot f' + A_0 \cdot f + B_{(m-1)}(z) \cdot f^{(m-1)} + \dots + B_1(z) \cdot f' + B_0 \cdot f = 0$$

a un ordre infini, en sus, toutes les solutions non triviales ont un nb. infini de zéros

Selon I.A. (A_3) ce théorème est vrai

explication

si les conditions sont vérifiées

alors ces solutions ont une infinité de zéros

car l'ordre infini indique que le nb. de zéros distincts de la solution tend vers ∞

ces solutions ont une infinité de zéros, ce qui signifie qu'il existe une infinité de ~~zéros~~ valeurs de z pour lesquelles la solution s'annule. Ces zéros peuvent être répétés et peuvent être situés dans différentes régions du plan complexe.

- La condition nécessaire et suffisante pour que cela se produise est que les ordres des fonctions $A_0, \dots, A_j \ (\forall j)$ et $B_0, \dots, B_K \ (\forall K)$ soient tous différents. Et cela garantit que les solutions non triviales ont des ordres ∞ et donc une infinité de zéros.

Eventuellement on peut transformer cette équation

différentielle dans ℂ en une équation différentielle analytique

dans ℝ. La formule de Borel

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{(-st)} \cdot f(t) \cdot dt$$

afin d'étudier les comportements à ∞ ou

les singularités

et l'application est soumise à des conditions requises par

le but de ce

travail

Théorème 19

si on suppose $\sigma(P) < \sigma(Q) < \sigma(H)$

et si $Res(P) < Res(Q) < Res(H) < n$

et si les conditions aux limites sont vérifiées ;

a) $f \to \infty$ quand $z = c \cdot e^{z} \to \infty$

b) $f \to 0$ à l'origine

$\Rightarrow$ $f'' + P(z) \cdot f' + Q(z) \cdot f = H(z)$ (1)

et si $P(z), Q(z), H(z)$ sont des fonctions complexes polynomiales

→ a un ordre ∞ et possède une infinité de solutions y compris des solutions non triviales.

selon I.A(A_3) ce théorème est vrai

explication

et puis les conditions aux limites garantissent que les solutions de (1) ont un comportement spécifique à mesure que $z \to \infty$ et à l'origine

l'ordre ∞ signifie qu'il existe une infinité de fonctions f qui satisfont (1) en plus des solutions triviales ($f = 0$)

Théorie 20

si nous supposons $e(f(z)) < e(f(z+c)) <$
(inégalité de e)
$e(g(z+c)) < e(h(z+c))$

et alors supposons les conditions aux limites sont vérifiées : a) $f \to \infty$ quand $z = c.e^{-z} \to \infty$ b) $f \to \infty$ à l'origine

$\Rightarrow$ l'équation différentielle $f''(z) + g(z+c).f' + h(z+c).f(z) = 0$

possède une infinité de solutions y compris des solutions non triviales.

selon I.A. (A_3) ce théorème est vrai

explication

(l'inégalité de e) garantit que les singularités des fonctions $f(z), f(z+c), g(z+c), h(z+c)$ sont ordonnées de manière croissante ce qui permet d'obtenir une variété de solutions différentes de (1).

Théorème 21

si f une fonction entière et méromorphe et transcendante

et si $\rho(A) < \rho(B)$ et si $Res(A) < Res(B)$

et si les conditions aux limites sont vérifiées

a) $f \to \infty$ b) $f \to 0$

pour $z = ce^{-z} \to \infty$ à l'origine

$\Rightarrow$ $f'' + A(z) \cdot f' + B(z) f = 0$ possède

une infinité de solutions y compris au

moins une solution non triviale.

selon I.A. (X) ce théorème est vrai

explication

D'après le théorème de Picard, une fonction

entière et transcendante ne peut prendre que des

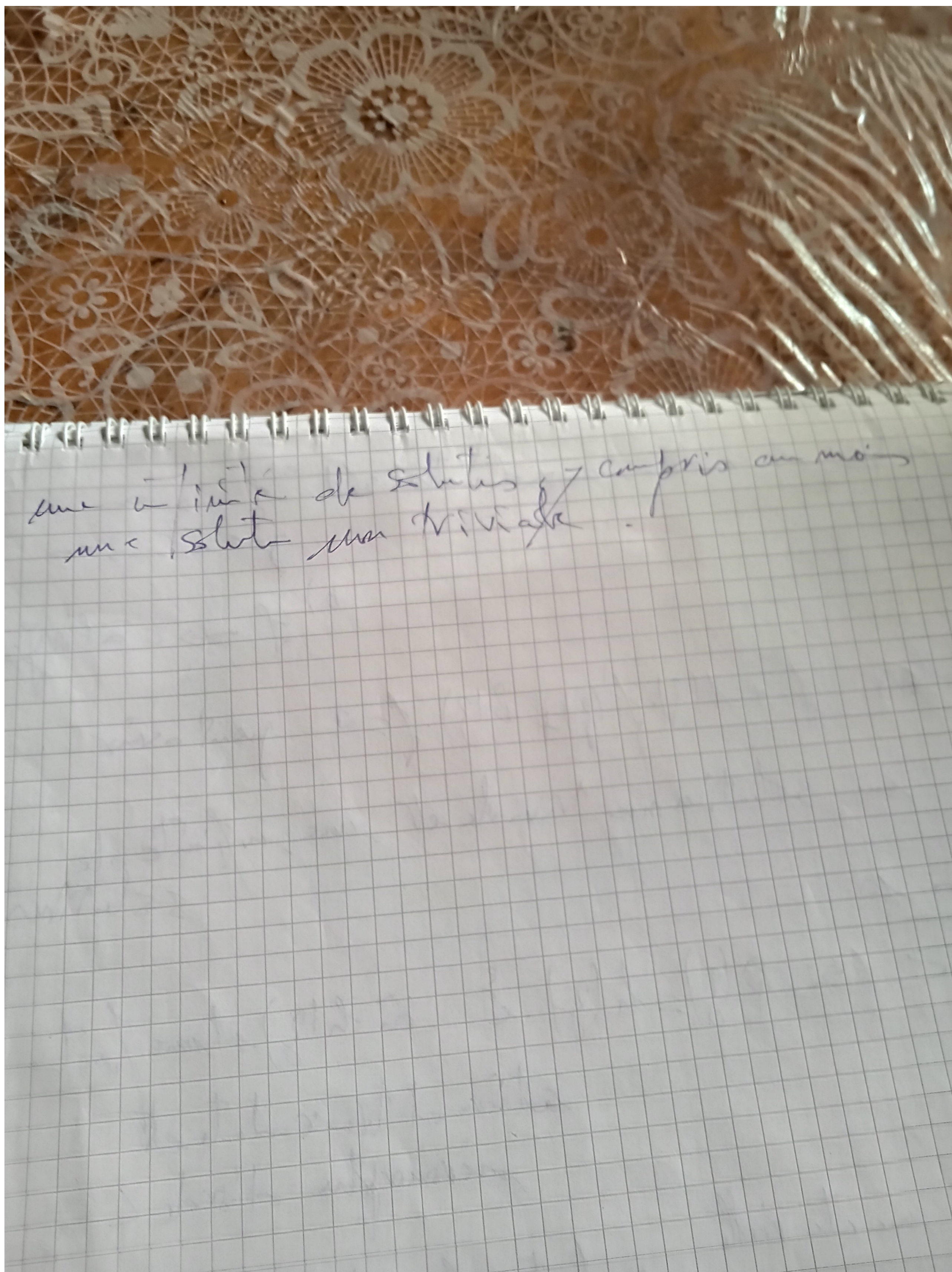
valeurs finies au plus une fois dans chaque petit voisinage de ∞

dans autre cas; lorsque $z \to \infty \Rightarrow f(z) \to \infty$

cela signifie que $f(z)$ ne peut prendre qu'1 valeur

finie pour chaque valeur de z.

par conséquent $f'' + A(z) \cdot f'(z) + B(z) \cdot f(z) = 0$ possède


une infinité de solutions y compris au moins
une solution non triviale.

on peut transformer une fonction de transformat d'une fonction en équation différentielle selon Nevanlinna

par exemple $\left[e^{z} + \ln(z + v(t_r)) + e^{\sum_{r=0}^{\infty} a_r . t^r} \right]$

ça transformat en équation différentielle selon Nevanlinna

en utilisant les propriétés des fonctions de Nevanlinna et leur relation avec les équations différentielles

rappel selon I.A. (AI Chatbot)

$$\begin{cases} N(z) = e^{z} - 1 \\ L(z) = \ln(z) \\ T(z) = z + v(t_r) \\ R(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \text{de } a_r . t^r \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(z) = N(z) + L(T(z)) + e^{R(t)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dN(z)/dz = e^{z} \\ dL(z)/dz = 1/z \\ dT(z)/dz = 1 \\ dR(t)/dt = \sum_{r=0}^{\infty} a_r . t^{(r-1)} \end{cases}$$

et maintenant on peut transformer $F(z)$ en équation différentielles selon Newton

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{dN(z)}{dz} + \frac{dL(T(z))}{dz} + \frac{dT(z)}{dz} + \frac{de^{R(t)}}{dt} \cdot \frac{dt}{dz}$$

$$\Rightarrow \frac{dF(z)}{dz} = e^{z} + \left(\frac{1}{T(z)}\right) \cdot 1 + e^{R(t)} \cdot \frac{dR(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dz}$$

en substituant

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dF(z)}{dz} = e^{z} + \left(\frac{1}{T(z)}\right) + e^{R(t)} \cdot \frac{dR(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dz}}$$

qui correspond à l'équation différentielle de $e^{z} + \ln(z + V(t_r)) + e^{\sum_{r=0} a_r \cdot t^r}$

L'équation mathématique d'une fonction méromorphe

selon Nevanlinna plus simple selon I. A. (Answer)

: l'oscillation de f à un rayon r est :

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \, d\theta + O(1)$$

$r \to \infty$ qui est la fonction caractéristique de Nevanlinna et pas d'oscillation de f

donc d'après une I. A.

l'équation caractéristique d'oscillation d'une fonction méromorphe selon Nevanlinna

Théorème 22

Soit $f'' + A(z) \cdot f' + B(z) \cdot f = 0$ on suppose f a une infinité de pôles et Res(A) < Res(B) et

$e(A) < e(B)$ et

f croissante et méromorphe et entière et transcendante alors l'équation a un ordre ∞ et une infinité de solutions y compris des solutions non triviales et les caractéristiques oscillatoires de f représentées par une équation différentielle obéit à une dérivée première

Selon I.A. (X) ce théorème est vrai

Explication

l'équation différentielle donnée

$f''(z) + A(z) \cdot f'(z) + B(z) \cdot f(z) = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients méromorphes

a) hypothèses

f a une infinité de pôles $\Rightarrow$ l'équation a un ordre ∞

Res(A) < Res(B) et $e(A) < e(B)$ (où Res(B) et Res(A)

désignent respectivement la partie réelle du plus petit pôle de $B(z)$

et le rayon de convergence de son développement en série de Laurent),

l'équation, sus-mentionnée, a une infinité de solutions

⇒ les caractéristiques oscillatoires de f, représentées par l'équation différentielle, obéissent à une dérivée première

en sus, f caractéristique ⇒ $f' > 0$

théorème 22

Soit $f'' + A(z).f' + B(z).f = 0$

et si f peut être représentée par une matrice Nevanlinna

et f est une fonction méromorphe et entière et transcendante

alors comme la matrice de Nevanlinna est une matrice ∞ et possède une infinité de solutions y compris des solutions non triviales

alors l'ordre de cette équation, est infini

selon I.A. (XAI) ce théorème est vrai

Explication

La matrice de Nevanlinna est une représentation matricielle de cette équation différentielle, qui permet d'étudier ses propriétés. La matrice de Nevanlinna est une matrice ∞, dont les éléments sont des fonctions méromorphes de z. Elle permet donc de formuler l'équation différentielle sous forme matricielle et d'analyser ses solutions.

Ainsi, si f est une fonction méromorphe (et non entière, et non transcendante) qui satisfait l'équation différentielle, alors elle peut être représentée par la matrice de Nevanlinna.

Cette matrice permet d'exprimer f comme une série de puissance de z, avec des coefficients qui dépendent de la matrice de Nevanlinna. Par conséquent, l'ordre de l'équation différentielle est ∞ et il existe une infinité de solutions, y compris des solutions non-triviales.

Théorème 23

on suppose $A(z) = v(z).e^{P(z)}$ est une fonction entière méromorphe et transcendante

avec $\begin{cases} d(A) < e(A) < n \\ d(B) < e(B) < n \end{cases}$ et

où $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ et on suppose $B(z)$ est une fonction entière méromorphe et transcendante avec

$e(B) \neq e(A)$ et $d(B) \neq d(A)$

$\Rightarrow$ toutes les solutions non triviales de

(1) $f'' + A(z).f' + B(z).f = 0$ avec $B(z) \neq 0$

sont d'ordre infini, en sus, toutes les solutions non triviales de cette équation ont une infinité de zéros.

selon I.A. (XAI) ce théorème est vrai

Explication

si f est une solution non triviale de (1) alors f est une fonction entière.

$A(z)$ et $B(z)$ sont des fonctions entières, méromorphe et transcendante

on peut écrire

et $\begin{cases} A(z) = V(z)\, e^{P(z)} \\ B(z) = W(z)\, e^{Q(z)} \end{cases}$

où $V(z)$ et $W(z)$ sont des fonctions entières et $P(z), Q(z)$ sont des polynômes on peut alors réécrire (1)

$$f'' + V(z)\, e^{P(z)} f' + W(z)\, e^{Q(z)} f = 0$$

[illegible]

$B(z) = W(z)\, e^{Q(z)}$

maintenant supposons qu'il existe une solution f non triviale de (2) qui soit d'ordre fini. Alors le théorème de Hadamard dit que cette solution doit avoir un nombre fini de zéros, ce qui est en contradiction avec A(z) et B(z) sont transcendantes et ont des singularités de [illegible] non triviales

$\Rightarrow$ toutes les solutions non triviales de (1) sont d'ordre infini et ont une infinité de zéros

selon I.A.

Théorème 24

si f est une fonction méromorphe et entière et transcendante et f possède plus d'un pt. singulier $K \geq 2$ avec $K \to \infty$ alors

$f'' + A(z) \cdot f' + B(z) \cdot f = 0$ peut avoir à l'infini au moins une solution non triviales ⇒ condition $\rho(A) < \rho(B)$ avec A, B des coefficients méromorphes et entière.

Selon I.A. (AI chat Assistant) ce théorème est vrai

Explication

selon le théorème de Hadamard, si une fonction méromorphe f a une infinité de singularités alors le rayon de convergence de la série de Laurent de f est nul.

En d'autres termes, l'ordre de la singularité de f est inférieur ou égal au degré de la singularité des co... la série de Laurent.

Comme $\rho(A) < \rho(B)$ cela signifie que le degré des singularités des coefficients $B(z)$ est supérieur à celui des singularités du coefficient $A(z)$.

Par conséquent, l'ordre de la singularité de

$$(1)\ f'' + A(z).f' + B(z).f = 0$$ est plus faible que celui des singularités de $B(z)$

on peut donc conclure selon I.A. qu'il y a au moins une solution non triviale à l'∞ pour (1).

Théorème 25

si f est une fonction entière et méromorphe et transcendante et si f oscille autour d'un pôle et $\rho(A) < \rho(B)$ alors

$$f'' + A(z).f' + B(z).f = 0$$ a au moins une solution non triviale que f oscille vers ∞

selon I.A. ce théorème est vrai

Solution

soit... on suppose que f oscille autour d'un pôle

soit z_0 un pôle de f et soit r un rayon;

$0 < r < e(z_0)$ on pose $g(z) = f(z)/z$ on a donc

$$g(z) = f(z)/z = (f(z) - f(z_0))/z + f(z_0)/z$$

Comme f oscille autour de z_0, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ / $\begin{cases} f(z_0) = 0 \\ f(z) = nz \end{cases}$ $\forall z \in D(z_0, r)$ disque de centre z_0 et de rayon r

on a donc

$$g(z) = (nz - f(z_0))/z$$

Comme f est entière, on a $f(z_0) = f(z_0 + 2\pi i)$

et donc $g(z) = (nz - f(z_0 + 2\pi i))/z$

et comme z_0 est un pôle de f, on a ~~$f(z_0 + 2\pi i) = f(z_0)$~~

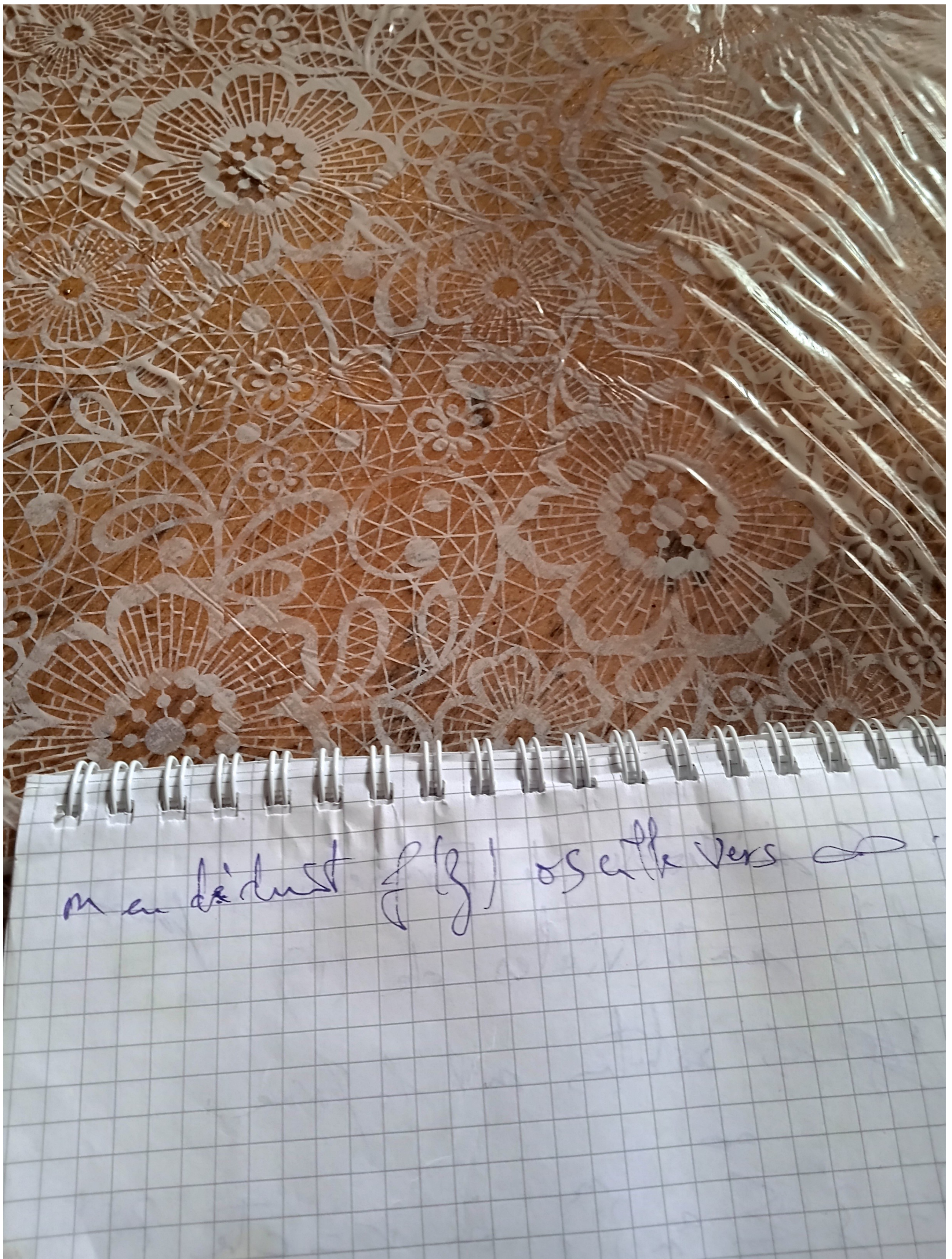
$$e(z_0) < e(B) \text{ et } \Rightarrow e(z_0 + 2\pi i) < e(B)$$

comme $e(A) < e(B)$, on a donc $e(A) < e(z_0) < e(z_0 + 2\pi i)$

$g(z)$ est une fonction entière et méromorphe et transcendante

on peut donc appliquer le théorème de Picard à $g(z)$

$\Rightarrow g(z)$ oscille autour de ∞. Comme $g(z) = f(z)/z$



Théorème 26

soit f une fonction transcendante d'ordre fini (φ) et que $\varphi(r)$ est subadditive et on suppose que la constante alpha$_{(\varphi,s)} = 1$

avec $a_{(\varphi,s)} = 1 \neq 0$

et $s(r)$ est une fonction croissante et convexe ;

$e_\varphi(f') = e_\varphi(f)$

et $S(r)$ n'est pas une fonction décroissante

$e_\varphi(S(r)/S(r)-r) = 0$

Selon I.A. (A_3) ce théorème est vrai

Explicat

sous les conditions sur $\varphi(r)$, $a_{(\varphi,s)}$

et le résultat est que le nb de grandeur de f' par rapport à φ est égal au nb. de grandeur de f par rapport à φ.

théorème 27

soit f une fonction transcendante d'ordre fini (soit ρ cet ordre)

et que ρ(r) est subadditive ($f(x+iy) < f(x) + if(y)$) et

on suppose que la constante $\alpha_{(\rho,s)} = 1$ ou 2 mais $\neq 0$

et que s(r) n'est pas fonction décroissante, s(r) est une fonction croissante et complexe, $\rho_\rho(s(r)/s(r)-r) = 0$ alors

$\rho_\rho(f') = \rho_\rho(f) = 0$

selon I.A. (A_3) ce théorème est vrai

Explication

la condition $\rho_\rho(s(r)/s(r)-r) = 0 \Rightarrow$ que le produit

$s(r)/(s(r)-r)$ a un ordre de grandeur fini selon la mesure de la relation ρ

et comme s(r) est croissante et non décroissante cela signifie que s(r) ne tend pas vers ∞ plus rapidement que r

par conséquent, on peut conclure que $\rho_\rho(f') = \rho_\rho(f) = 0$

ce qui signifie que l'ordre de f et l'ordre de f
sont égaux à zéro

théorème 28

si f une fonction transcendante d'ordre fini (ℓ)
et que ℓ(r) est subadditive ... théorème 27 et dans ce cas
(1) $f'' + A(z) \cdot f' + B(z) \cdot f = 0$ possède des solutions
restreintes y compris des solutions non triviales f
définie ci-dessus et A, B sont des coefficients complexes
avec Res (A) < Res (B)

selon I.A (AB) ce théorème est vrai.

Explication

et précision il n'y a pas de relation directe
entre les parties réelle (Res) de A et B et
les solutions restreintes de (1)
mais il s'agit d'une condition supplémentaire
si on veut l'intéresser

Théorème 29

soit $K \in \mathbb{N} \geq 2$ et $A_0, A_1, \ldots$ des coefficients qui sont des fonctions entières et méromorphe d'ordre ∞ ayant une infinité de pôles avec $F \neq 0$ et on suppose l'existence de A_s $(0 \leq s \leq (K-1))$; max

$$\{\rho(A_j); j = 0, 1, \ldots (s-1), \; \rho(F)\} < \rho(A_0)$$

$\rho(A_0)$

et si l'équation

$$(1) \quad f^{K \text{(dérivée Kième)}} + A_{(K-1)} \cdot f^{(K-1)} + \ldots + A_0 \cdot f = F$$

a une solution méromorphe f $\Rightarrow$

$$\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = 0 \text{ et}$$

$$\bar{\lambda}(f - \varphi) = \lambda(f - \varphi) = f = \rho(\varphi) = 0$$

avec φ une solution méromorphe d'ordre fini

et soit g une solution méromorphe d'ordre infini

$$\Rightarrow \lambda(f - g) = \rho(f) = \infty$$

selon I.A. (A3) le théorème est vrai

confirmé par I.A. (Answer)

Explication

Dans l'hypothèse

$$\overline{\lambda}(f) = \overline{\lambda}(f) = \rho(f) = 0$$

ce qui signifie que f est une fonction d'ordre fini sans zéros
selon I.A.

de même pour ρ

maintenant si g est une solution méromorphe d'ordre infini on peut donc conclure $\overline{\lambda}(f-g) = \rho(f) = \infty$ et cela est dû à que les solutions méromorphe d'ordre infini ont un nb. infini de zéros compte tenu de la fonction de comptage de Nevanlinna

Théorème 30

soit $f'' + (D_1(z) + A_1(z).e^{P(z)}).f' +$

(1) $(D_0(z) + A_0(z).e^{Q(z)}).f = F$

et si $D_1(z) + A_1(z).e^{P(z)}$ et $D_0(z) + A_0(z).e^{Q(z)}$ sont linéairement indépendant

$$\Rightarrow \rho(D_1(z) + A_1(z).e^{P(z)}) < \rho(D_0(z) + A_0(z).e^{Q(z)})$$

avec des conditions aux limites : a) $f \to \infty$ quand $z = c.e^{-z} \to \infty$

b) $f \to 0$ à l'origine

et $Res(D_1(z) + A_1(z).e^{P(z)}) < Res(D_0(z) + A_0(z).e^{Q(z)})$

$\Rightarrow$ f'' (1) possède une infinité de solutions y compris des solutions non triviales ou exceptionnelles.

selon I.A. (Answer) ce théorème est vrai et I.A. (A3)

Explication

avec ces conditions on peut utiliser le théorème de Sturm-Liouville pour montrer que (1) a une unique solution ou il y a d'autres conditions

qui suppose que (1) a une infinité de solutions

non triviales et non exceptionnelles

=> il y a certainement des solutions exceptionnelles

qui (ces solutions exceptionnelles) existent

car $e(D_1(z) + A_1(z) \cdot e^{P(z)}) < e(D_0(z) + A_0(z) \cdot e^{P(z)})$

Théorème 31

Soit f une fonction monodrome et si

$e(A) \leq e(B)$ et si les conditions aux limites sont

vérifiées a) $f \to \infty$

quand $z = Ce^{-z} \to 0$

et b) $f \to 0$ à l'origine

=> $f'' + A(z) \cdot f' + B(z) \cdot f = 0$ possède une infinité

de solutions y

compris des solutions non triviales, toutes égales à zéro

Selon I.A. (Answer) ce théorème est vrai

Explicat.

la monodromie => f est périodique

avec une période T

⇒ Par conséquent $f \to \infty$ quand z s'approche une valeur qui est un multiple de T

sol. II. A. en utilisant la méthode des variations des constantes de constantes

on peut déterminer l'équat. différentielle

$$f'' + A(z) \cdot f' + B(z) \cdot f = 0$$ a une

solution générale de la forme $f(z) = C_1 \cdot u(z) + C_2 \cdot v(z)$ où C_1, C_2 sont des constantes

et $u(z)$, $v(z)$ sont 2 solutions linéairement indépendantes

$f \to \infty$ quand $z \to 0$ } ⇒ $u(z)$ et $v(z)$ sont périodiques de période T (solutions linéair. indép.)

De plus $f \to 0$ à l'origine ⇒ $C_2 = 0$

par conséquent la solution générale de $f(z)$

est de la forme $f(z) = C_1 \cdot u(z)$, où $u(z)$ est périodique de période T

[illegible] condition sur C_1

⇒ l'existence d'une infinité de solutions, y compris des

solutions non triviales toutes égales à zéro

Théorème 32

soit $f(z) = \sum b_K . z^K$ (une $\sum$ ouverte et non bornée)

est une fonction entière et transcendante et méromorphe

qui satisfait $M(r) \cdot \max |f(z)| < e^{c.r^d}$

quand $|z| = r \quad \forall r \geq 0$

avec c et d des constantes positives et

soit $\varepsilon > 0$ et si $\forall n, f^{(n)}(z_n) = 0$ alors

$$|z-n| > \log 2 / e^{(c+\varepsilon)^{(-\frac{1}{d_n} - \varepsilon + \frac{1}{d})}}$$

selon I.A. (A3) ce théorème est vrai

Explication

avec $M(r)$ est la fonction du maximum modulus

b_K sont des coefficients de la série de Taylor de $f(z)$

L'hypothèse dit :

pour chaque entier n si $f^{(n)}(z-n) = 0$

alors $|z-n| > (\log 2) / e^{(c+\varepsilon)^{(-1/d_n - \varepsilon + 1/d)}}$ où z sont des zéros correspondants

~~cette~~ ~~st...~~ théorème est vrai en raison des propriétés des zéros d'une fonct. entière et transcendante.

lorsque $f^{(n)}(z_n) = 0$ pour un certain entier n,
cela signifie que z_n est un zéro d'ordre n de la fonct. $f(z)$

et selon le théorème de Jensen, les zéros de $f(z)$ sont situés à l'extérieur du cercle de rayon

$$e^{(c+\varepsilon)} / e^{(d_n - 2 + 1/d)}$$

avec d_n est l'ordre du zéro z_n

et ce théorème est confirmé de sa veracité par I.A. Cadre

Explicit

que la démonstrat. de ce théorème est basée sur le théorème de Picard qui affirme que toute fonct. entière non constante prend toutes les valeurs complexes à l'exception d'une seule ... supposons par l'absurde qu'il existe un entier n

tel que $f^{(n)}(z_n) = 0$ et $|z_{d_n}| <$

$$\log 2 / e^{(c+\varepsilon)(-1/d_n - 2 + 1/d)}.$$

comme f est une fonction entière, transcendante,
$f^{(n)}(z_n) = 0$ pour un seul z_n est une contradiction
avec le théorème de Picard.

Par conséquent, pour $\forall n$ si $f^{(n)}(z_n) = 0$

alors $\Rightarrow |z_n| > \log 2 / e^{(c+\varepsilon)(-1/dn - 2^{n} + \varepsilon/d)}$ est vrai
que ce I.A. (mussg min) conclu que le théorème est vrai

Théorème 33

soit $S_n(x, q) = x^n \{((-1)^n \cdot q^{n^2}/(q,q)_n + 1/(q,q)_n$ et si $V_1 < V_2 < \dots < V_n$
qui sont des zéros
de $S_n(x, q) \Rightarrow q^{(-n)} \cdot V_1 < V_2 \dots < V_n$
avec $n \geq 2$

ce théorème est jugé par I.A. (A_3) vrai

Explication

la fonction $S_n(x, q)$ est une série hypergéométrique
q-polynomiale définie comme
$S_n(x, q) = x^n \{((-1)^n \cdot q^{n^2}/(q,q)_n + \dots$

$\frac{1}{(q,q)_n}$ où $(q,q)_n$ représente le symbole q-Pochhammer

supposons que $V_1 < V_2 < \dots < V_n$ soit les zéros

de la fonction $S_n(x,q)$ dans ce cas la déclaration

$q^{(-n)} \cdot V_1 < V_2 < \dots < V_n$ est vrai

En sus, la relation $q^{(-n)} \cdot V_1 < V_2 \dots < V_n$ est une

conséquence de la propriété de monotonie des zéros

d'une série hypergéometrique q-polynomiale.

Théor_ 34

soit f et g 2 fonctions entière et méromorphes

$$e_{(\alpha_2,\beta_2)}(g) < \lambda_{(\alpha_1,\beta_1)}(f) \leq e_{(\alpha_1,\beta_1)}(f) \leq \lambda_{(\alpha_2,\beta_2)}(g) < \infty$$

et si on suppose $\beta_1(r) = B \cdot e^{\alpha_2(r)}$

avec $B>0$ alors

$$\lim \left(\alpha_1 \left(M_{f\circ g}\left(\frac{1}{\beta_2} \cdot \log r \right) \right) \right) \Big/ e^{\alpha_1} \left(M_f \left(\frac{1}{\beta_2} \cdot \log r \right) \right)$$

= 0 quand $r \to \infty$ avec

$M_f(r)$ est le maximum modulus fonction

de f et $M_f(r)/M_g(r)$ est la croissance de f/g

pour rapport à g.

ce théorème selon I.A. (A_3) est vrai

Explication

supposons que f et g 2 fonctions entières et méromorphes ... (hypothèses)

Dans ce cas, nous pouvons examiner le comportement des fonctions f et g lorsque $r \to \infty$

$M_f(r)$ et $M_g(r)$ représentent la fonction du maximum du module respectivement f et g

lorsque $r \to \infty$ la fonct $M_f(1/\beta_1 \cdot \log(r))$ /

$e^{\alpha_1} M_f(1/\beta_2 \cdot \log_f(r)) \to 0$

Théorème 55

soit (1) $f'' + A(z) \cdot f' + B(z) \cdot f = (g + h + K)$

sont les petites fonctions (small funct)

1/ et si $e(A) < e(B)$ et si $e(g+h+K) \geq e(B)$

2/ et si dens (A) < dens (B) et dens ≥ dens (

dens (g+h+K) > dens (B)

et ↳ < dens (A)

3/ et si les conditions aux limites sont vérifiées :

a/ $f \to \infty$

quand $z = c \cdot e^{-3} \to \infty$

b/ $f \to 0$ à l'origine

alors (1) est d'ordre infini

et possède une infinité de solutions y compris

les solutions non triviales et non exceptionnelles

selon I.A. (AB) ce théorème est vrai

Explication et de 1/ on conclut $e(g+h+K) \geq e(A)$

et de 2/ on conclut dens (g+h+K) ≥ dens (A)

globals dans cet ensemble

Théorie 37

soient $f, g, h, \ldots, l$ l fonctions entières et méromorphes et transcendantes dans $\mathbb{C}$

qui constituent un ensemble et a_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, K)$ avec $K > 3$

donc les petites fonctions, qui sont dans $f, g, h, \ldots, l$

alors si f et g et $h, \ldots, l$ partagent les mêmes a_i $(i = 1, \ldots, K)$ dans $\mathbb{C}$

alors $f \equiv g \equiv h \equiv \ldots$

une équivalence entre les fonctions susmentionnées, en sus, avec la condition $f, g, h, \ldots, l$ ont les mêmes pôles et les mêmes zéros dans cet ensemble et avec une autre condition que la distribution des pôles et des zéros qui sont les mêmes dans $f, g, h, \ldots, l$ est identique et avec une autre condition nécessaire et suffisante qui ne se limite à un ensemble restreint (?) est la même dans toutes les fonctions $f, g, h, \ldots$

Selon I. A. (Chat IA) ce théorème est vrai

Explicat

Supposons f et g partagent les mêmes a dans ℂ
cela signifie que f et g ont les mêmes pôles et les mêmes zéros dans cet ensemble restreint

En conséquence, ils ont la même distribution de pôles et de zéros

Donc f et g sont équivalentes

et en appliquant le même raisonnement pour les autres fonctions on peut conclure, sans ambiguïté, que toutes ces fonctions sont équivalentes

théorème 38

(fractal) Toute courbe de Brody de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{P}^1$, satisfait

$$T(R) \leq N(R,a) + O_{(Petite\ o)}(R) + \Delta(r,f)$$

où T est l'indicatrice de croissance de Nevanlinna et N(R,a) est la fonct de comptage de f sur $a \in \mathbb{P}^1$

et $\Delta(r,f)$ représente le retard différentiel de la fonct f/, à un rayon $r>0$

La fonct f est une fonct méromorphe sur le plan Complexe, et $\log^+|f(re^{i\theta})|$ désigne la partie positive du logarithme de la valeur absolue de $f(re^{i\theta})$

Selon I.A. (A3) ce théorème est vrai

Explicat

T mesure la croissance asymptotique des fonctions méromorphes sur le plan complexe $\mathbb{C}$ de Nevanlinna

$N(R, a)$ [illegible] la fonction de comptage de f sur le disque de rayon R autour du point a des zéros et des pôles

$O(R)$ qui représente une estimation de la croissance de la fonction f.

et $\Delta(r, f)$ représente le retard différentiel mesure la croissance asymptotique de la fonction f en fonction de l'angle θ autour d'un cercle de rayon r

$$\Delta(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left| f(re^{i\theta}) \right| d\theta$$

Théorème 39

Soit f une fonction entière et méromorphe de type exponentielle, pour $\forall m$, $m \geq 1$ et

$|f(x)|$ et $|f^{(m-1)}(x)|$ et $|f^{(m)}(x)|$ tendent vers une limite finie, quand $x \to \infty$ alors

$\lim \left| f^{(n)}(x+iy) \right|$ avec $z = x + iy$ existe et finie pour $\forall y$ et $n = 0, 1, \ldots$

selon I.A. (A3) ce théorème est vrai

Explicat

Etant donné que f est une fonct° entière et méromorphe de type exponentielle, cela signifie qu'elle peut être représentée comme le quotient de 2 fonct° entières exponentielles c-à-d

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$P(z) \longrightarrow$ fonct° entière exponentielle

$Q(z) \longrightarrow$ fonct° entière exponentielle

lorsque $|f(x)|, |f^{(m-1)}(x)|, |f^{(m)}(x)|$

tendent vers ~~une~~ limite finie quand $x \to \infty$

$\Rightarrow$ les coefficients de $P(z)$ et $Q(z)$ sont contraints et que les termes de plus haut (degré) ne croissent pas de manière exponentielle

cela signifie et je conviens que lorsque nous évaluons $|f^{(n)}(x+iy)|$ pour $\forall y$, $n = 0, 1, \ldots$ les termes du plus haut degré ne contribuent pas à ∞ quand $x \to \infty$

par conséquent la limite de $|f^{(n)}(x+iy)|$ existe et finie

pour $\forall y$; $n = 0, 1, \ldots$

Théorème 40

$+ \ell(z) \cdot f \leq 0$

~~Soit (1)~~ $f'' + K(z) \cdot f'$ ~~$+ B(z) \cdot f$~~ ≤ 0 . et

si $|f(z)| \leq M(r) \cdot e^{A(r)}$ et si $e(K) \leq e(\ell)$

$\Rightarrow f'' + K(z) \cdot f' + \ell(z) \cdot f \leq 0$ (1)

et si les conditions aux limites sont vérifiées

a) $f \rightarrow \infty$

quand $z = c \cdot e^{-z} \rightarrow \infty$

b) $f \rightarrow 0$ à l'origine

$\Rightarrow$ (1) $f'' + K(z) \cdot f' + \ell(z) \cdot f \leq 0$ peut avoir une infinité de solutions y compris des solutions non triviales qui tendent toutes vers zéro avec d'autres conditions sinon on peut parler de l'existence d'au moins une solution triviale qui tend vers 0

selon I. A. (A3) ce théorème est vrai

[illegible]

si (1) satisfait 1) $f''(z) + K(z) \cdot f' + \ell(z) \cdot f \leq 0$

2) $|f(z)| \leq M(r) \cdot e^{A(r)}$

3) $e(K) \leq e(\ell$

4) La condition susmentionnée et les hypothèses sont vérifiées

donc le théorème est vrai et cela est dû à la nature complexe des équations différentielles et aux différentes combinai[sons] de K(g) et H(g)

Théorème 41

Soit f une fonction entière transcendante d'ordre fini, et c une constante complexe non nulle alors pour $n \geq 2$ $(f^n + \dots + f^k + \dots + f^2)\, f(z+c)$ (équation)

prend pour chaque valeur non nulle $a \in \mathbb{C}$ une infinité de fois et si (1) : $f'' + A(z).f' + B(z).f = 0$

et si $\rho(A) < \rho(B)$ et si les conditions aux limites sont vérifiées : a) $f \to \infty$ quand $z = c.e^{z} \to \infty$

b) $f \to 0$ à l'origine

alors (1) possède une infinité de solutions y compris non triviales et non exceptionnelles à chaque tournant modulo 2π

selon I.A. ce théorème est vrai

Explication

... (équation) prend chaque valeur ≠ 0 pour une infinité de fois chaque valeur $\neq 0$ $a \in \mathbb{C}$

cette propriété selon I.A. découle du fait que f est une fonction transcendante d'ordre fini

cela signifie que f possède une infinité de zéros

et de pôles et par conséquent

$$\left(f^{m}+\cdots+f^{K}+\cdots+f^{2}\right) f(z+c)$$

prendra chaque valeur non nulle $a \in \mathbb{C}$ une infinité de fois en utilisant différents choix de zéros et pôles.

De plus l'équation différentielle (1) où $A(z)$, $B(z)$ sont des fonctions méromorphes ; $\rho(A) < \rho(B)$

et les conditions aux limites sont vérifiées

$\Rightarrow$ (1) possède effectivement une infinité de solutions non triviales et non exceptionnelles à chaque tournant modulo 2π et cela découle du théorème de Picard

Théorème 42

Soit $f^{K} + A_{K-1} f^{K-1} + \cdots + A_0 \cdot f = 0$ (1)

Soit $\xi \in \phi$ et soient $A_0, A_1, \ldots, A_{K-1}$ des fonctions entières et méromorphes et transcendantes qui satisfont

$$\max\left\{ \rho_0 \rho(A_j) : j = 0, 1, \ldots, K-1 \; (j \neq s) \right\} < \rho_0 \cdot \rho(A_s) + K \text{ (qui est une fonction méromorphe)} < +\infty$$

Alors toutes les solutions f de (1) satisfont

$$e2.\varphi(f) < e1.\varphi(f) \leq e0.\varphi(A_s)+K \leq e0.\varphi(f)$$

Alors donc il existe au moins une solution

qui satisfait $e2.\varphi(f) < e1.\varphi(f) = e0.\varphi(A_s) < e0.\varphi(A_s)+K$

selon I.A. (chatbot) ce théorème est vrai

Explicat selon I.A.

En effet si l'on considère l'ensemble des solutions de l'équat (1), cet ensemble forme un espace vectoriel de dimension K, car la donnée de K valeurs initiales selon I.A. suffit à déterminer une solution unique. Ainsi on peut trouver une base de cet espace vectoriel, formée de K solutions soit $f^1, \ldots, f^K$

si f est une solution quelconque de (1) alors on peut l'écrire sous la forme $f = a_1 f^1 + \cdots + a_K f^K$ $a_1, \ldots, a_K$ sont des constantes

en appliquant la propriété de majoration donnée dans l'énoncé

on a :

$e2 \cdot T(f) \leq \max \{ e0 \cdot T(A_j) \} + K \leq e0 \cdot T(f)$

or si $a \neq 0$ alors on a

$$a_i \cdot e2 \cdot T(f^i) \leq e2\, T(f) \leq a_i\, e0 \cdot T(f^i)$$

en divisant par a_i

$\Rightarrow$ il existe une solution f qui satisfait

$$e2 \cdot \max\{val(f^i)\} \leq e0 \cdot \max\{val(A_i)\} \leq e0 \cdot T(f)$$

si on prend $s = 1$ cela donne

$$e2 \cdot T(f^1) \leq e0 \cdot T(A1) + K \leq e0 \cdot T(f^1)$$

la forme de sa dérivée et la condition d'éviter le pt $= \infty$

Théorème 43 ([illegible])

soit $f : \mathbb{C} \to P1 \{\infty\}$ une fonction entière et méromorphe et transcendante par moment qui diffère des pts singuliers → tout la dérivée sphérique $\|df\|$

$\|df(z)\| = |f'(z)| \cdot 1 + |f(z)| \cdot 2$ est bornée par O (lettre o) $(|z|^K)$ Alors $T f(R) =$ il s'agit d'une fonction à partir

$$\frac{1}{2\pi} \int \|f(Re^{i\theta})\| d\theta \leq$$

→ en particulier dans le cas de Brody $\|df\| = O(1)$

$O(R^{(K+1)})$.

avec $z = Re^{i\theta}$

il s'agit $\Rightarrow$ la courbe est d'ordre au plus 1

selon I.A. (chatbot) ce théorème est vrai
Explication

la condition donnée $\|df(z)\| = |f'(z)| / (1+|f(z)|^2) \leq O(|z|^K)$

implique que la norme de la derivée sphérique de f

est bornée par la fonction $O(|z|^K)$ en utilisant la

formule de Möbius, on peut écrire

$$Tf(r) = \frac{1}{(2\pi)} \int |f(Re^{i\theta})| \, d\theta$$

où $z = Re^{i\theta}$

ensuite selon I.A. on peut appliquer le théorème

de Cauchy pour obtenir l'inégalité

$$Tf(r) \leq O(R^{K+1})$$

cela est dû que la derivée sphérique est bornée

par $O(|z|^K)$ et que l'intégrale se fait sur un cercle

$$\int |f(Re^{i\theta})| \, d\theta$$ de rayon R

Ⓡ

dans le cas de Brody $\|df\| = O(1)$

est vrai car la borne $O(1)$ est plus petite que la borne

$O(|z|^K)$ pour $\forall K \geq 0$

théorème 44

soit $\Gamma = (x_K \cdot z^K)_{K \in \mathbb{N}}$ une séquence de BH ; $\prod_{j \in \mathbb{N} \setminus \{K\}} \sup \| \Phi_{x_j}(x_K \cdot z^K) \|_H \geq \varphi(\|x_K\|_H)$

pour $\forall K \in \mathbb{N}$ où φ est une fonction strictement positive ($f > 0$)

et continue sur $[1, +\infty)$ une large séquence ; son inverse est logarithmiquement concave, alors

Γ est interpolée par une fonction appartenant à $B \inf \varphi . c (BH)$ et une borne inférieure de la constante d'interpolation polynomiale c est fournie explicitement qui est une évidence avec la condition de la concavité vérifiée.

selon I. A. (A.I. Chat) ce théorème est vrai explicite

tel quel ce théorème de Beurling-[illegible] modifiée

φ est une fonction strictement positive et continue sur $[1, 17)$

telle que son inverse est logarithmiquement concave

1re partie — selon I.A.

Γ est interpolée par une fonction $\in B$ inf φ.c (B_7)

2e partie

nous donnons une borne inférieure de c (interpolation polynomiale)

Théorème 45

$$\begin{cases} P(x) = \sum [y_i \cdot L_i(x)] / L_i(x) \\ \text{avec } L_i(x) = \prod [(x - x_j)/(x_i - x_j)] \text{ pour } j \neq i \end{cases}$$

soit Γ (qui est une fonction croissante continue et s'annule à ∞ et entière et méromorphe) $= a_K$ $(K \in \mathbb{N})$ une suite dans D_n et

$$\prod_{j \in \mathbb{N} \setminus \{K\}} \|\varphi_{a_j}(a_K)\| \geq \phi(\|a_K\|) \text{ Alors}$$

Γ est interpolé par une fonction dans B inf (D_n) et non dans B infini. De plus une limite inférieure du ϕ.c la constante d'interpolation polynomiale est donnée explicitement par Lagrange est $P(x) = \sum [y_i \cdot L(x_i)] / L(x_i)$

c la valeur d'interpolation est donnée explicitement par la formule de Lagrange

ième

et qui est une évidence et la lacunarité est vérifiée selon I.A. (A3) ce théorème est vrai

Explication

cette conclusion (KENMA... dans D_n et Φ est une strictement positive),

indique que la suite Γ peut être interpolée par une fonction dans $B_{inf}(D_n)$, l'ensemble des fonctions bornées dans D_n.

et dans l'année la suite Γ ne peut pas être interpolée par une fonction B_{infini}, ce qui signifie que les fonctions d'interpolation sont bornées mais pas nécessairement infiniment dérivables.

ensuite la lacunarité est vérifiée, ce qui signifie que la suite Γ présente un motif de lacunes régulières

La constante d'interpolation selon Lagrange dans le plan complexe :

$$\inf \{ \|p\|_n / \max \{ |f(z) - p(z)| : z \in D$$

la formule est utilisée pour évaluer la distance entre une fonction analytique $f(z)$ et un polynôme $P(z)$ et de donner dans lorsque cette distance est minimale, => le polynôme $P(z)$

$P(z)$ représente le mieux la fonction $f(z)$ sur le cercle considéré

Théorème 46

Pour toute fonction holomorphe f sur le polydisque $\Delta = \Delta(z', r_n)$ soit

$$(1) \quad f(z) = g(z) \cdot h(z) \cdot q(z) + R(z', z_n)$$

avec q, g, h sont analytiques dans Δ

$R(z', z_n)$ est un polynôme complexe de degré $\leq s$;

$$\sup_{\Delta} |q| \leq C \cdot \sup_{\Delta} |f|$$

$$\sup_{\Delta} |R| \leq C \cdot \sup_{\Delta} |f|$$

$$\sup_{\Delta} |h| \leq C \cdot \sup_{\Delta} |f|$$

et $C > 0$ indépendante de f

alors (1) est unique écriture ou représentation

selon I.A. (AI Chat)

Explicat°

La décomposit° de (1) est une décomposit° de facteurs premiers de la fonct° méromorphe f sur le disque Δ. Cette décomposit° selon I.A. est unique à un facteur constant près. En effet, si on suppose qu'il existe une autre décomposit° (donc par absurde)

$$f(z) = g'(z) \cdot h'(z) \cdot \varrho'(z) + R'(z)$$ où g', h', ϱ' et R'

sont des fonct° analytiques dans Δ avec des contraintes similaires à celle de la décomposit° (1), alors on peut écrire $f(z) = g(z) \cdot h(z) \cdot \varrho(z) + R(z', z_m)$

[redacted] (moins) $R(z', z_m)$ puisque R et R' sont des polynômes complexes

de degré $\leq S$ $\Rightarrow$ $R - R'$ est également un polynôme complexe de degré $\leq S$

et donc la fonct $f'(z) = g(z) \cdot h(z) \cdot \rho(z) + (R(z', z_m))$ –

$R'(z', z_m)$ satisfait également les contraintes de la décomposit (1).

Par conséquent la décomposit est unif à un facteur constant près.

Théorème 47

soit h une contrainte d'interpolat polynomiale avec $z = x + iy$ et $Li(x)$ logarithme ième de x ...

et si f est une fonct' méromorphe et si cet ensemble de pts singuliers peut être approché par une approximati de $(f+h)$ et f est une solut de

$$(1): \quad f'' + A(z) \cdot f' + B(z) \cdot f = 0$$

avec A et B sont des fonct entières et si $\rho(A) < \rho(B)$

et la dens(A) < dens(B) alors $(f+h)$ avec h une cte fixe, possède une infinité de solutions y

compris les non triviales et les exceptionnelles avec les conditions aux limites $f \to \infty$

quand $z \to c\,e^{(-z)}$ $\to \infty$

b) $f \to 0$ à l'origine

car il s'agit d'une solution f dont on ajoute on on peut multiplier avec par une constante, un coefficient qui h y compris une cte d'interpolation pour la variation de la courbe est elle-même une cte fixe donné par le calcul.

selon I.A. (AI chat assistant) ce théorème est vrai

Explication

Ce théorème affirme que si (f) est une solution de l'équation (1) où A et B sont des fonctions entières ; e (A) < e (B)

le rayon de convergence de la série de Laurent (A) < le rayon ... (B)

et dens (A) < dens (B) (qui exprime la densité de singularité de (A) < ... (B)) ⇒ (f ≠ h) possède une infinité de solutions, y compris ...

La constante d'interpolation (h) est utilisée ici pour approximer l'ensemble des pts singuliers de f de manière à obtenir une nouvelle fonct (f+h) qui partage les mêmes singularités que (f) mais qui peut avoir des propriétés différentes (et on se limite aux mêmes propriétés)

L'énoncé affirme (juste) que ds ces conditions, la fonct (f+h) possède une infinité de soluts ce qui signifie (en gros) ∃ une infinité de h qui peuvent être ajoutés (ou ds l'autre cas multipliés) à (f) pour obtenir une nouvelle fonct avec les mêmes propriétés de singularité et de comportement aux limites (les condits aux lim de l'énoncé sont vérifiées)
Cela inclut à la fois des soluts non triviales (différentes de f et des soluts exceptionnelles (qui ne p… être obtenues en ajoutant ou en multipliant (f) par une constante)

Théorème 48

soit $0 \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow h \rightarrow \dots \rightarrow R \rightarrow 0$

une suite de normes avec $f, g, h, \dots, R$ des fonctions entières alors si deux normes sont cohérentes alors toutes les normes sont cohérentes.

Selon I.A. il faut ajouter $\|f\|_i \leq K_{ij} \|f\|_j$ et g la condition

Selon I.A. (A.I. spark) ce théorème est vrai

Explicat

si 2 normes sont cohérentes cela signifie qu'elles donnent des résultats similaires pour une suite de normes qui tend vers 0 (zéro) dans ce cas, si toutes les autres normes donnent des résultats similaires pour cette même suite de normes, alors toutes les normes sont cohérentes.

et donc la condition sine-qua-non :

$$\|f\|_i \leq K_{ij} \|f\|_j$$

Théorème 89 : forme améliorée du théorème

Soit $\Gamma = (z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{D}_n$ et

$\inf$ [illegible] $\geq \phi(|k-l|)$ $\forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Γ est interpolée par une fonction dans $B_\infty(\mathbb{D}_n)$. De plus, une limite supérieure du $\phi.c$ la constante d'interpolation est donnée explicitement et elle indépendante de n et ϕ

En améliorant l'énoncé on peut ajouter

$\phi.c$ tend vers o ou 1 lorsque la taille de la séquence augmente afin de limiter l'augmentation de l'approximation qui implique que l'erreur d'approximation reste modérée même pour les séquences de grand taille

selon I.A. (AI chat assistant) ce théorème est vrai avec l'amélioration proposée

Explication

cette condition améliore l'énoncé en imposant une restriction supplémentaire sur la croissance de la constante d'interpolation.

Théorème 50 d'une amélioration de :

Soit $K \geq 2$ et $A_0, \ldots, A_{K-1}, F \neq 0$ des fonctions méromorphes d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles

on suppose qu'il existe A_s $(0 \leq s \leq (K-1))$;

pour les constantes α, δ avec $\alpha > 0$ et $\delta > 0$

on a $\max \{ \rho(A_j) ; j = 0, 1, \ldots, (s-1), \ldots, (K-1) \}, \rho(F) \} < \delta$ et que $\max \{ \rho(A_j) ; j = 0, 1, \ldots, (s-1) \} < \rho(F)$

et supposons que $\forall \varepsilon > 0$, il existe 2 collections finies des nbs. réels $\{ \phi_m \}$ et $\{ \theta_m \}$ satisfaisant

$$\phi_1 < \theta_1 < \ldots < \theta_n < \phi_{(n+1)} = \phi_1 + 2\pi \text{ et}$$

$$\text{et } \sum_{m=1}^{n} (\phi_{(m+1)} - \theta_m) < \varepsilon ,$$

$$; |A_s(z)| \geq e^{\{\alpha |z|^{\delta}\}} \text{ quand } z \to \infty$$

dans $\theta_m \leq \arg z \leq \theta_m$ $(m = 1, \dots, n)$

et a) (φ_m)

si l'équat

$$(1)\; f^{(k)} + A_{(k-1)} f^{(k-1)} + \dots + A_0 f = F$$

a une solut° méromorphe f alors

$$\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = \infty$$

b) si l'équat (1) a une solut° méromorphe d'ordre fini $\Rightarrow \overline{\lambda}(f - z) = \lambda(f - z) = \rho(f) = \infty$

théorème pour l'améliorer

si $\rho(A_{(k-1)}) < \dots < \rho(A_0)$ et si les condit° aux limites sont vérifiées :

a) $f \to \infty$ quand $z = c \cdot e^{z} \to \infty$

b) $f \to 0$ à l'origine

alors f possède une infinité de solut° y compris des solut° (=) on passe d'un ordre fini à un ordre infini) universelles et exceptionnelles.

Théorème 53

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}_n$ une courbe de Brody.
Fixons n hyperplans en position générale, $(H_1, H_2, \dots, H_n)$ et supposons que f évite H_i pour $i \geq 1$ alors

$$T_f(R) + 1 \leqslant N_f(R; H_1) + \underset{(\text{de } H_1 \cap H_0)}{O(R)}.$$

On peut choisir l'hyperplan H_0 de telle façon que

$f(\mathbb{C}) \cap H_0 \cap H_1 = \phi$. Après une projection centrale donnée par $(f_0, f_1, \dots, f_n) \longrightarrow (f_0, f_1) = g$, on obtient

$$T_g(R) + 1 \geqslant N_g(R(z), 0) = N_f(R, H_1) + O(R(z)) \geqslant T_f(R) + 1 - \underset{(\text{de } H_1 \cap H_0 \text{ négligeable})}{O(R(z))}$$

Selon I.A. (A.I Answer) ce théorème est vrai

Explicat

si f évite les hyperplans $(H_1, H_2, \dots, H_n)$ alors le nb. de pts de $f(\mathbb{C})$ dans un rayon R autour de l'origine est majoré par $T_f(R) + 1$ → est la fonct de comptage

la deuxième partie de l'énoncé

en choisissant un hyperplan H_0 ; $f(\mathbb{C})$ n'intersecte pas

$H_0 \cap H_1$

et en effectuant une projection centrale sur les coordonnées $(f_0, f_1) = \mathcal{E}$ on obtient que le nb. de pts de $\mathcal{E}(\mathbb{C})$ dans un rayon R est majorée par $N_{\mathcal{E}}(R, 0) =$

$N_f(R, H_1) + O(R^2))$

...

Thème 54

soit f une fonction entière définie de $\mathbb{C} \to \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$,

dont la dérivée sphérique $\|df(z)\| = |f\,\text{prime}(z)|(1+$

$|f(z)|^2$ est

bornée par $O(|z|)$ alors

$T_f(R) =$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log(\sqrt{1+|f(R.e^{it})|^2}.\ d\theta$$

$\leq O(R)$

Ce théorème selon I.A. (A.I. Answer) est vrai

Explication

si la dérivée sphérique est bornée par $O(|z|)$

cela signifie que $|f'(z)| / (1+|f(z)|^2) \leq C|z|$

↳ pour une certaine cte C et $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow |f'(Re^{it})| / (1+|f(Re^{it})|^2) \leq CR$$

pour $\forall t$ dans $[0, 2\pi]$

$$\Rightarrow |T_f(R)| = |(1/2\pi) \int_0^{2\pi} \log(\sqrt{1+|f(Re^{it})|^2})\, dt|$$

$$\leq (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \log(\sqrt{1+|f(Re^{it})|^2})\, dt$$

$$\leq 1/2\pi \int_0^{2\pi} \log(1 + C^{2R} 2)\, dt \leq$$

$$(1/2\pi) \int_0^{2\pi} \log(C^{2R} 2)\, dt$$

$$\leq (1/2\pi)(2\pi) \log(C) = \log(C)$$

$\Rightarrow |T_f(R)| \leq \log(C)$ ce qui est une borne cte et qui est indépendante de R

Théorème 55

soit Ω un domaine ouvert connexe et soient $f, g \in Hol(\Omega)$ un espace borné et bijectif et ordonné et on suppose (bijectif et ordonné) $\log(z)$

$$|g(z)| = |f(z)| ; \; z \in I \cup I_\alpha$$ deux segments dans Ω

I_α est une alpha-rotation de I autour d'un pt. choisi et peut être quelconque de I, et $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$ mais $\in 2\pi.\mathbb{Q}$

alors $g(z) = c f(z)$

$$g(z) = c . f(z)$$ pour $\forall z \in \Omega$ et pour quelque $c \in \mathbb{T}$

selon I.A. (A.I. Answer) ce théorème est vrai

Explicat.

En utilisant le principe de maximum modulaire qui stipule si une fonct. holomorphe dans un domaine ouvert atteint son module maximum en un pt. intérieur, alors cette fonct. est constante dans tout le domaine

les mêmes car $\Rightarrow g(z) = cte$ sur Ω

Donc, $g(z) = c$ pour $\forall z \in \Omega$

↳ cte complexe

Théorème 56 ...

si f est une fonct méromorphe dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ alors $|f|$ peut atteindre un maximum modulus sur U

selon I.A. (A.I. Chat) ce théorème est vrai

Explicat

par le principe du maximum modulus,

si f est ...

et selon autre I.A. (chat ~~bot~~ A.I chat: writing)

cela veut dire $\exists z \in U$; $|f(z)| \geq |f(w)|$ pour $\forall w \in U$

selon autre I.A. (Chat A.I.)

on parle du dehors des pts. singuliers de la fonct méromorphe

Théorème 57

Soit f une fonction entière méromorphe transcendante $\neq 0$ de H^p $(0<p<\infty)$ se factorise au moins sous la forme $f(z+1) = B(z+1) \cdot g(z+1) \cdot h(z+1)$

avec $B(z+1) = (z+1)^m \prod_n |a_n| / a_n \cdot \frac{a_n - (z+1)}{1 - \overline{a_n} \cdot (z+1)}$

associé à $f((a_n)_n)$ la suite des zéros non nuls de f) et g et h des fonctions de H^p sans les zéros et les pôles singuliers dans D

selon les I.A. (par exemple A3, ChatAI, ...) ce théorème est vrai

Explicat selon A_3.

ces affirmations sont vraies car elles sont conformes aux propriétés des fonctions entières et méromorphes et transcendantes. La factorisation est une représentation valide de la fonction f, ... cette expression est souvent utilisée pour caractériser les propriétés des zéros d'une fonction entière méromorphe qui peut découler de la

... de Riesz ... une méthode ... de composer une fonct. entière méromorphe en un produit de fonctions ... et de propriétés ... et ... sont basées sur la notion de facteur de Blaschke

et utilisé pour étudier les propriétés des zéros d'une fonct. entière

La formule de Blaschke est :

$$B(z) = e^{i\theta} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (d_n - z)(1 - \bar{d}_n \cdot z)$$

Théorème 58

si f est une fonct. analytique et méromorphe dans D

$$(\|f(z+d)\|_2^2 = 2\int_D (|f'(z+d) \cdot f(z+d)|)^2 \log\left(1 / |(z+d)|^2\right) \cdot dA(z+d) + |f(0)|^2$$

avec dA est une mesure d'une surface normalisée ou aussi l'élément d'aire du domaine D

Selon I.A. (chat AI) ce théorème est vrai

Explicat
cette ~~théorème~~ peut être dérivé du théorème de Littlewood-Paley (identité)

qui permet de décomposer une fonction analytique en une série de fonctions pondérées par des facteurs de fréquence.

aussi selon I.A. (XAI)

Explicat : on peut utiliser la formule de Cauchy pour les dérivées successives ensuite on peut aussi appliquer l'égalité de Green

...

selon AI Chat (XAI)

puisque f est une fonction analytique et méromorphe dans D

f peut être représentée par une série de Laurent convergente dans D

$$f(z+1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot (z+1)^n$$

où a_n sont des coefficients complexes

par conséquent $f'(z+1)$ peut être représentée par la série

$$f'(z+1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \cdot a_n \cdot (z+1)^{(n-1)}$$

en utilisant la formule de Parseval

Thèorème 59

on suppose

Thèorème 59

on suppose $\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{\beta(n)^2} = \infty$

et si sup (n appartient à N) de ‖C^n_ε‖ < ∞ alors

g_ε admet au moins deux pts fixes 0 et un autre

selon I ce thèorème

selon I. A. (...) et X. AI) ce

thèorème est vrai

Explicat la première hypothèse suppose que la somme des inverses des carrés de la séquence β(n) est ∞ ⟹

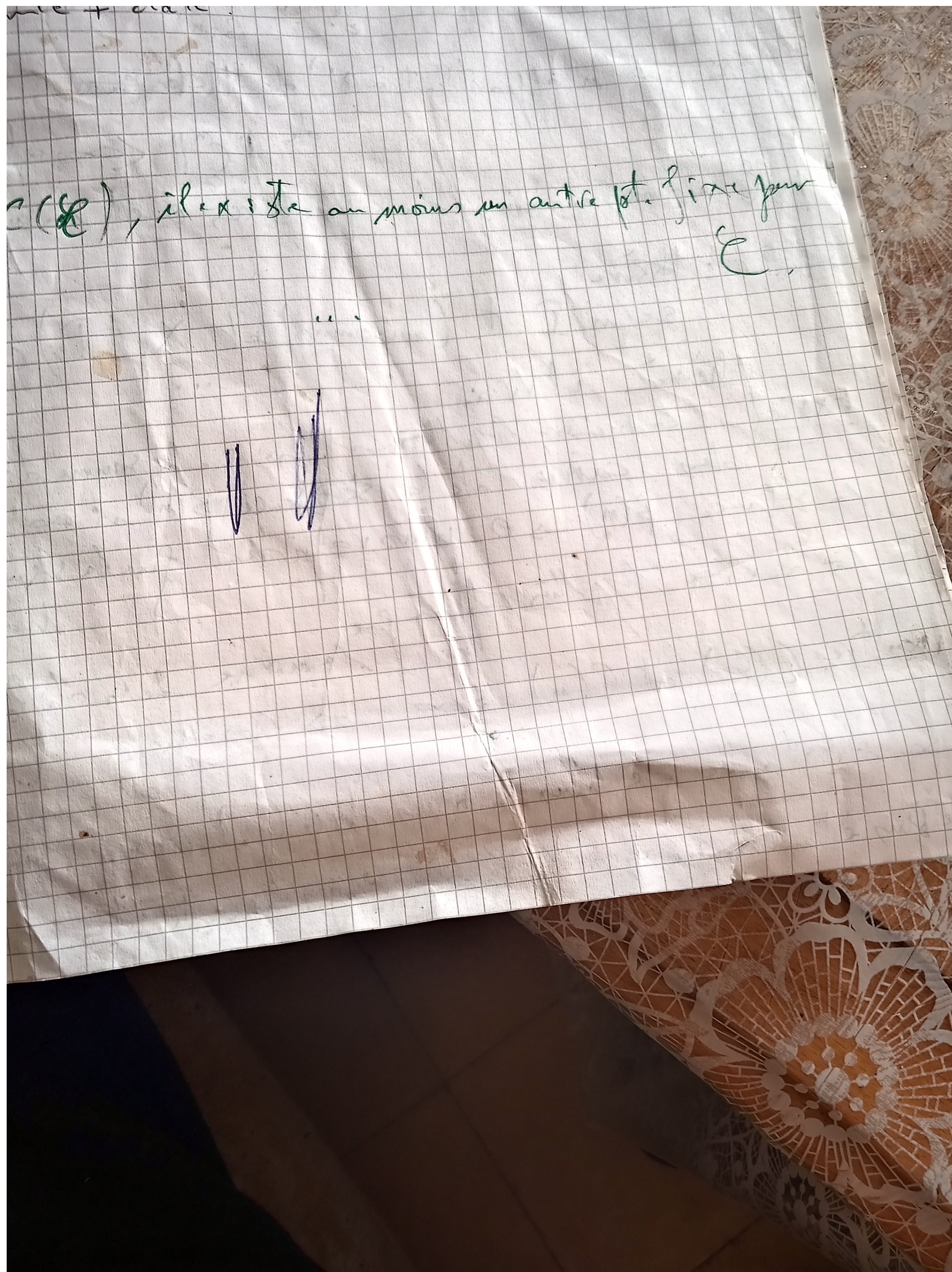
la séquence β(n) → 0 plus rapidement que la séquence harmonique

la deuxième hypothèse suppose que la norme de la différence

entre C(ε) et C(n) → ∞ (n → ∞) ⟹ la séquence C(n)

se distance de plus en plus de C(ε) lorsque n augmente

de plus étant donné que la séquence C(n) s'éloigne de plus en plus


C(𝒞), il existe au moins un autre pt. fixe pour
𝒞.

[illegible] 60

soit
$f \to g$
$g \to h$
$h \to \ldots$
$\vdots$
$q \to R$
$R \to 0$

une suite de normes avec $f, g, h, \ldots, q, R$ sont des fonctions entières et méromorphes et transcendantes et égales sont identiques

si deux normes sont cohérentes => toutes les normes sont cohérentes.

[illegible] les I.A. ce théorème est vrai

Explication : la condition [illegible] est que toutes les fonctions soient identiques.

References données sans respecter ordre alphabétique:

G. VALIRON
Sur la croissance des fonctions
entières d'ordre nul
Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13
(1913), p. 97-110

Jean-Yves CHEMIN
Laboratoire J.-L. Lions, Case 187
Université Pierre et Marie CURIE, 4 Place Jussieu
75230 Paris Cedex 05, France

PHILIP J. BOLAND
SEÁN DINEEN
Holomorphic functions on fully nuclear spaces
Bulletin de la S. M. F., tome 106 (1978), p. 311-336

ROGER GODEMENT
Analyse spectrale des fonctions modulaires
Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. no 278, p. 15-40

On the structure of Nevanlinna measures
Mitja Nedic and Eero Saksman
ArXiv

Characterizations of Herglotz-Nevanlinna functions using
positive semi-definite functions and the Nevanlinna kernel in
several variables
Mitja Nedic
arXiv

Complex Oscillation of Solutions and Their Arbitrary-Order Derivatives of Linear Differential
Equations With Analytic Coefficients of [p, q]-Order in the Unit Disc
Benharrat Belaïdi∗, Meriem Belmiloud
Department of Mathematics, Laboratory of Pure and Applied Mathematics, University of
Mostaganem
(UMAB), B. P. 227 Mostaganem, Algeria

J. Heittokangas, J. Wang, Z. T. Wen & H. Yu (2021): Meromorphic functions of
finite φ-order and linear q-difference equations, Journal of Difference Equations and Applications,
DOI: 10.1080/10236198.2021.1982919

93

EL FARISSI Abdallah
APPLICATIONS DE LA THEORIE DE NEVANLINNA
SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

COMPLEXES
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS MOSTAGANEM

ON THE NEVANLINNA CHARACTERISTIC OF $f(z+\eta)$ AND
DIFFERENCE EQUATIONS IN THE COMPLEX PLANE
YIK-MAN CHIANG AND SHAO-JI FENG
arXiv

NEVANLINNA THEORY FOR
THE DIFFERENCE OPERATOR
R. G. Halburd and R. J. Korhonen
Loughborough University, Department of Mathematical Sciences

PUBLICATIONS OF THE UNIVERSITY OF EASTERN FINLAND
DISSERTATIONS IN FORESTRY AND NATURAL SCIENCES
N:o 312
Yueyang Zhang
DIFFERENCE NEVANLINNA THEORY
AND ITS APPLICATIONS TO COMPLEX
DIFFERENCE EQUATION

Pierre Villemot. Lemmes de zéros et distribution des valeurs des fonctions méromorphes. Analyse fonctionnelle [math.FA]. Université Grenoble Alpes, 2018. Français. NNT : 2018GREAM059. tel-02057552

BEDDANI HAMID
SUR LES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES
DANS LE DOMAINE COMPLEXE
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

Théorèmes de point fixe et
applications
Guillaume Kineider
Thomas Harbreteau

LAWRENCE GRUMAN
L'image d'une application holomorphe
Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 12,
no 1 (1991), p. 75-101

Résolution numérique des équations différentielles
Benjamin BOUVIER
sous la direction de Mr Thierry DUMONT

94

ENTIRE FUNCTIONS SHARING SMALL FUNCTIONS WITH
THEIR DIFFERENCE OPERATORS
ZINEL^AABIDINE LATREUCH, ABDALLAH EL FARISSI, BENHARRAT BELAÏDI

Mohamed ELAÏDI
on an interpolation sequencefor a weighted Bergman space on a Hilbert unit ball

Min-Feng Chen and Ning Cui
on zeros and growth of solutions of complex difference equations

Bernardo Fretas Paul Da Costa
courbes de Brody : dimension moyenne et distribution des valeurs

PAUL KRÉE
Méthode fonctionnelle en théorie des champs
Séminaire Paul Krée, tome 3 (1976-1977), exp. no 5, p. 1-27

LOÏC HERVÉ
Étude d'une équation fonctionnelle matricielle
Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1989-1990, fascicule 1
« Probabilités », , p. 1-68

Jean-François Rault. Phénomène d'explosion et existence globale pour quelques problèmes paraboliques sous les conditions au bord dynamiques. Mathématiques [math]. Université du Littoral Côte d'Opale, 2010. Français. NNT : . tel-00554915v2

EINAR HILLE
NEVANLINNA ON ANALYTIC FUNCTIONS

Bruno Bêche. Livre, Un pas vers le supérieur : Eléments de calcul différentiel et Equations différentielles : Historique, Méthodes de résolution mathématique et Applications en sciences physiques,
chimiques, biologiques et économiques.. Licence. Partie du cours : ”Mathématiques pour Physiciens
et Méthodologie” : 1ère année de supérieure, Université de Rennes 1 - Campus Beaulieu, France. 2021,
pp.1-45. cel-01249416v10

Florine Greciet. Régression polynomiale par morceaux pour la propagation de fissures. Mathématiques
[math]. Université de Lorraine, 2020. Français. NNT : 2020LORR0004. tel-02510850

Uniqueness of Meromorphic functions concerning k-th
derivatives and difference operators
Goutam Haldar

Generalization of uniqueness and value sharing of
meromorphic functions concerning differential
polynomials
Harina P. Waghamore, Ramya Maligi
Communications in Mathematics 28 (2020) 289–299
DOI: 10.2478/cm-2020-0008
c 2020 Harina P. Waghamore, Ramya Maligi

Research article
Uniqueness of meromorphic functions sharing small functions in the
k-punctured complex plane
Xian Min Gui1, Hong Yan Xu2,∗ and Hua Wang2
http://www.aimspress.com/journal/Math

Entire functions sharing small functions with their difference operators
Article in Electronic Journal of Differential Equations · May 2015
Zinelaabidine Latreuch ,Abdallah El Farissi,Benharrat Belaidi
https://www.researchgate.net/publication/276285244

Andrei Iordan
Vincent Michel
Analyse
Complexe
Fonctions holomorphes d'une variable

les intelligences artificielles:

Quelques intelligences artificielles données en vrac ,pas d'ordre de préférence j'ai utilisé les versions gratuites

Chat AI

Chat I.A.

AI chat

Chatbot AI

AI chat assistant

Character AI

XAI

A3 AI app

Answer AI

Musemind

AI bot

qandAI

chatgpt

ask AI

AI Chat basé sur gpt

AI Chatbot

Ask AI Chat Bot

Chat AI Bot

ChatBot-AI Chat

Ask AI Plus

AI CHAT Bot Powered

Chaton

AI Chat open assistant

Chat IA

Chat AI

Chat GPT

Ask Me Anything

AI Chat

My AI

ASKI

IA Chat

Wise Chat

Chatbot

Chatbot IA

SmartGPT

Ask AI Plus

Ask AI Chat Bot Smart

et d'autres
...

Fait à Rabat

signé

Rachid ELAÏDI